ステファンの問題について (Navier-Stokes方程式等の位相解析的数値解析的研究)

AUTHOR(S):

河原田, 秀夫

数理解析研究所講究録
164巻 1972年 211-226

ステファンの問題について

東大　工学部　河原田秀夫

§1. 序論

1.1 熱伝導方程式の自由境界の問題は，その起源は古く，かなり長期にわたつて考られている。いくつかの特別の場合には explicit な解が見出されているが一般の場合の解の存在および一意性の証明は20数年前に始めて与えられた。それ以後，種々なる方法が開発され，これらの問題は多岐にわたつて調べられている。まず最も簡単なステファンの問題について，いくつかの結果を紹介する。境界である指定された温度で熱せられている時の氷の溶解の問題（すなわち非同次デリクレ条件の下における一次元ステファン問題）は Rubinstein [1], Lacev [2], Friedman [3] によつて調べられている。一方境界において熱流が指定されている時の前者と同じ問題（即ち非同次ノイマン条件のもとにおける一次元ステファン問題）は Evans [4], J. Douglas & Gallie [5], Sestini [6], Miranker〔7〕, J.Douglas〔8〕, Kyner〔9〕, Friedman〔10〕などによつて調べられている。後者の場合については水と氷が共存している時も氷だけの時についても解の存在と一意性は完全に証明されている。Kolodner〔11〕によつて開発された自由境界を扱う方法はMiranker〔7〕によつて上記ステファン問題を解くのに用いられ，またFriedmanはKubinstein〔1〕の方法を精密化し、統一的見地からステファン問題や液滴の蒸発，凝縮の問題等を解いている。更に最近はLadyženskaja〔12〕, Oleǐnik〔13〕, Brezis〔14〕などによつて調べられている。

1.2 ここでは1.1の前者の問題を扱つたFriedmanの論文〔3〕を簡単に紹介し，次に彼の方法では解きえなかつた問題を提起する。非同次デリクレ条件のもとにおける一次元ステファン問題は次の微分方程式系で記述される；

$$(1.1)\qquad u_t = u_{xx}, \qquad 0 < x < S(t) \qquad t > 0$$

$$(1.2)\qquad u(0,t) = f(t) \geqq 0 \qquad t > 0$$

$$(1.3)\qquad u(x,0) = \varphi(x) \geqq 0 \qquad 0 < x < b,\ \varphi(b) = 0,\ b > 0$$

$$(1.4)\qquad u(S(t),t) = 0 \qquad t > 0$$

$$(1.5a)\qquad \frac{dS(t)}{dt} = -u_x(S(t),t) \qquad t > 0$$

$$(1.5b)\qquad S(0) = b$$

上の微分方程式系で$u = u(x,t)$は水の温度分布を表わし

$x=S(t)$は水と氷との境界，いわゆる自由境界を表わしている。これらは未知関数で同時に求めらるべき関数である。(1.2)，(1.4)は境界条件，(1.3)は初期条件であるが(1.5a)は自由境界上で与えられる熱平衡の方程式である。$f\geqq 0$, $\varphi\geqq 0$なる仮定は水の温度が非負であることにもとづく。今後微分方程式系(1.1)—(1.5b)をFBP.1と略記する。Friedmanによる

FBP.1の解の定義は

<u>定義1</u>　$0<t<\sigma$ $(0<\sigma<+\infty)$なるすべてのtに対して$u(x,t)$，$S(t)$が次の条件をみたすときをいう。

(i)　u_t，u_{xx}は$0<x<S(t)$，$0<t<\sigma$で連続である。

(ii)　u，u_xは$0\leqq x\leqq S(t)$，$0<t<\sigma$で連続である。

(iii)　uは$t=0$，$0<x\leqq b$においても連続であり，また$t\to 0$，$x\to 0$，のとき$0\leqq \liminf u(x,t)\leqq \limsup u(x,t)\leqq +\infty$をみたす。

(iv)　$S(t)$は$0\leqq t<\sigma$で連続的微分可能である。

(v)　u，SはFBP.1をみたす。

FriedmanはFBP.1に対して次の定理を得ている。

<u>定理</u>　FBP.1で$f(t)\in C'[0+\infty)$と$b>0$に対して$\varphi(x)\in C'[0,b]$を仮定する。このときFBP.1には一意的解$u(x,t)$，$S(t)$が存在する。さらに$S(t)$は狭義の単調増加関数である。

上の定理の証明のあらすじを述べる。まず $K(x,t:\xi,\tau)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left\{-\dfrac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right\}$ と定義し，次の補題を準備する。

<u>補題</u>　次の仮定

(i) $f(t)$ は $0\leqq t\leqq\sigma$ で連続である。(ii) $S(t)$ は $0\leqq t\leqq\sigma$ で lipshitz 条件をみたす。

のもとで

$$(1.6)\quad \lim_{x\to S(t)-0}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t f(\tau)K(x,t:S(\tau),\tau)d\tau=\frac{1}{2}f(t)+\int_0^t f(\tau)\left[\frac{\partial K(x,t:S(\tau),\tau)}{\partial x}\right]_{x=S(t)}d\tau$$

が任意の $t\in(0,\sigma]$ に対して成立する。

さらに境界条件 $u(0,t)=0$ に対する熱方程式のグリーン関数 $G(x,t:\xi,\tau)=K(x,t:\xi,\tau)-K(-x,t:\xi,\tau)$ を用いて FBP1 を次の積分方程式系に変換する。

$$(1.7)\quad u(x,t)=\int_0^t u_\xi(S(\tau),\tau)G(x,t:S(\tau),\tau)d\tau+\int_0^t f(\tau)G_\xi(x,t:0,\tau)d\tau+\int_0^b\varphi(\xi)G(x,t:\xi,0)d\xi \qquad (0<t\leqq\sigma)$$

$$(1.8)\quad v(t)=2[\varphi(0)-f(0)]N(S(t),t:0,0)+2\int_0^b\dot\varphi(\xi)N(S(t),t:\xi,0)d\xi-2\int_0^t\dot f(\tau)N(S(t),t:0,\tau)d\tau+2\int_0^t v(\tau)G_x(S(t),t:S(\tau),\tau)d\tau \qquad (0\leqq t\leqq\sigma)$$

$$(1.9)\quad S(t)=b-\int_0^t v(\tau)d\tau \qquad (0\leqq t\leqq\sigma)$$

上式で $v(t)$, $N(x,t:\xi,\tau)$ はそれぞれ $u_x(S(t),t)$ および $K(x,t:\xi,\tau)+K(-x,t:\xi,\tau)$ を表わしている。

積分方程式系(1.7)−(1.9)をFBP.I′と略記する。

FBPIとFBPI′と同値であることが容易に示される。

FBPI′の大域解の存在は問題を$v=Tv$(T:非線型)の形にかき適当な関数空間を導入して(i)時間に関し,局所的にはTがcontractionであることを用いて局所解を構成し;(ii)解vのしかるべきa priori評価を利用して解の延長を行なうという手順で行なわれる。しかし,すべての場合にこれが可能でなく,物理的に重要と思われる次の場合はopenであった。それは物理的に云いばFBPIにおいて最初に水がなく氷のみが存在する時に生じる。この論文の目的はそのような問題に対して解を構成することである。さらに$t=0$の近傍における自由境界の挙動を論じる。しかし,この問題に対する一意性は未だopenである。

1.3　ここで我々の主要結果を述べる。FBPIで$b=0$とおいた場合,すなわち初期条件(1.3)はとり除き(1.5b)を

(1.10)　$S(0)=0$

でおきかえた問題をFBPIIで表わそう。ただし,$f(t)$は次の条件をみたすものとする。

条件(f.1)　$f(t)$は$0\leqq t<+\infty$で連続的微分可能である。

条件(f.2)　$f(t)$は$f(0)=0$のとき$f'(0)>0$をみたす。

<u>定義2</u>　$0<t<\sigma\ (0<\sigma<+\infty)$ なるすべての t に対して u, S がFBPⅡの解であるとは定義1の (i), (ii), (iii) をみたし (iv), (v) の代りに次の条件をみたすときをいう：

(iv') $S(t)$ は $0\leqq t<\sigma$ で連続であり，しかも $0<t<\sigma$ で連続的微分可能である。すなわち，$v(t)$ は $0<t<\sigma$ で連続で $\int_{0+}(-)v(\tau)d\tau<+\infty$ をみたす。

(v') u, S はFBPⅡをみたす。

定義1の (iv) と定義2の (iv') のちがいに注意しよう。これはあとで述べるように $f(0)>0$ のとき $\dot{S}(t)$ が $t=0$ で $\frac{1}{\sqrt{t}}$ の特異性をもつことに由来する。このとき，我々は次の定理を得る：

<u>定理</u>　FBPⅡで $f(t)$ が条件 (f.1,2) をみたすとき (i) 解 $u(x,t)$ $S(t)$ が存在し，さらに $S(t)$ は狭義の単調増加関数である。(ii) 自由境界 $S(t)$ は $t=0$ の近傍で $c_0\leqq\dfrac{S(t)}{\sqrt{\int_0^t f(\tau)d\tau}}\leqq c_1$ をみたす。ただし $c_0, c_1\ (c_0<c_1)$ は $f(t)$ のみによる正なる定数である。

上の定理の証明の方針は次の通りである。まず我々は§§1.2における と同様にFBPⅡを積分方程式系に帰着する。次に $b>0$ に対し (1.3) の $\varphi(x)$ を $\varphi^b(x)=\frac{f(0)}{b}(b-x)\ (0<x<b)$ としたときのFBPⅠの解を $u^b(x,t), S^b(t), v^b(t)$ と書く。u^b, S^b, v^b の $b\to 0$ に際しての極

限(部分列)が存在し，求める解であることをたしかめるのである。解を構成する際に$f(t)$を次の2つの場合に分けて考える：(i) $f(0)>0$；(ii) σを十分小なる正数とするとき，$f'(t)\geqq 0$ $(0\leqq t\leqq\sigma)$.
(ii)は勿論$f(t)$が条件$(f,1,2)$のもとで$f(0)=0$の場合を含んでいる。

§2， 準備など

我々の定理の証明に必要ないくつかの補題を準備する。

2.1

<u>補題1</u>　§§ 1.2で述べた補題の(1.6)は$p(t)$, $S(t)$についての仮定(i),(ii)を

(i') $p(t)$は$0<t\leqq\sigma$で連続で$\int_{0+} p(\tau)d\tau<+\infty$をみたす。

(ii') $S(t)$は$0\leqq t\leqq\sigma$で連続で，$0<t\leqq\sigma$で連続的微分可能である。

にゆるめてもそのまま成り立つ。

(証明) §§ 1.2の補題の証明[3]を見直せば明らかである。

<u>補題2</u>　定義2の解に関し，FBPⅡは次の積分方程式系と同値である：

$$(2.1)\quad u(x,t)=\int_0^t v(\tau)G(x,t;S(\tau),\tau)d\tau+\int_0^t f'(\tau)G_\xi(x,t;0,\tau)d\tau \quad (0<t\leqq\sigma)$$

$$(2.2)\quad v(t)=-2f(0)N(S(t),t;0,0)-2\int_0^t f'(\tau)N(S(t),t;0,\tau)d\tau+2\int_0^t v(\tau)G_x(S(t),t;S(\tau),\tau)d\tau \quad (0<t\leqq\sigma)$$

(2.3) $s(t)=-\int_0^t v(\tau)d\tau \qquad (0\leqq t\leqq \sigma)$.

ただし，(2.1)—(2.3) において u, v, s は定義される範囲で連続であるとする。特に v は $\int_{0+}^{t} (-) v(\tau)d\tau<+\infty$ をみたす。今後簡単のため (2.1)—(2.3) を FBPII と略記しよう。

(証明) FBPII が FBPII′ に書けることは Green の恒等式と補題 1 を用いれば明らか。逆の証明は FBPI と FBPI′ [3] の場合と同様。

2.2 FBPI において $f(t), \varphi(x), b$ がそれぞれ $f_i(t), \varphi_i(x)=\frac{f_i(0)}{b_i}(b_i-x)$ $(0<x<b_i)$, $b_i>0\,(i=1,2)$ であるとしよう。このとき，$i=1,2$ に対して FBPI′ の解 u_i, s_i, v_i が存在するが，これらについての比較定理を準備する。

<u>補題 3</u> 上に述べた仮定とさらに $f_1(t)\geqq f_2(t)\ (0\leqq t\leqq\sigma)$ と $b_1\geqq b_2$ が成り立つと仮定すれば

(2.4) $S_1(t)\geqq S_2(t) \qquad (0\leqq t\leqq\sigma)$

が成り立つ。

(証明) 上の仮定を次の2つの場合に分け，それぞれの証明を与える。

Case (a) $f_1(t)\geqq f_2(t)\ (0\leqq t\leqq\sigma)$ $b_1>b_2$ のとき $S_1(t)>S_2(t)\ (0\leqq t\leqq\sigma)$ が成り立つ。

Case (a) の証明；背理法を用いる。$S_1(t)$ と $S_2(t)$ とが $t=t_0\,(>0)$ ではじめて交わる (すなわち $S_1(t_0)=S_2(t_0)$,

$0 \leqq t < t_0$ では $S_2(t) < S_1(t)$)と仮定しよう。このとき

(2.6) $\dot{S}_1(t_0) \leqq \dot{S}_2(t_0)$

が成り立つ。一方領域 $0 < x < S_2(t)$, $0 < t < t_0$ で u_1 と u_2 を比較する。$w = u_1 - u_2$ とおけば u_i $(i=1,2)$ に対する FBPI から

$$
(2.7)\quad \begin{cases} w_t = w_{xx} & 0 < x < S_2(t), \quad 0 < t < t_0 \\ w(0,t) = f_1(t) - f_2(t) \geqq 0 & 0 < t < t_0 \\ w(x,0) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x) > 0 & 0 < x < b_2 \\ w(S_2(t),t) = u_1(S_2(t),t) > 0 & 0 < t < t_0 \end{cases}
$$

を得る。よって(2.7)の w に対し強最大値原理[15]を用いれば

(2.8) $-u_{1,x}(S_2(t_0), t_0) > -u_{2,x}(S_2(t_0), t_0)$

を得る。これに(1.5a)を考慮すれば

(2.9) $\dot{S}_1(t_0) > \dot{S}_2(t_0)$

を得る。(2.9)は(2.6)に矛盾する。

Case (b) $f_1(t) \geqq f_2(t)$ $(0 \leqq t \leqq \sigma)$, $b_1 = b_2$ のとき。

Case (b) の証明：実は FBPI において S は b に連続に依存する(§3. 参照)。したがって，$\varepsilon > 0$ として b_1 を $b_1^{\varepsilon} = b_1 + \varepsilon$ でおきかえたときの S を S_1^{ε} で表わせば Case (a) により $S_1^{\varepsilon}(t) > S_2(t)$。ここで $\varepsilon \to 0$ ならしめれば $S_1(t) \geqq S_2(t)$ となる。

<u>補題 4</u>　FBP.I において $f(t)$ は条件 (f, I) と

(2.10) $\dot{f}(t) \geqq 0$ $(0 \leqq t \leqq \sigma)$

をみたし特に

(2.11) $\varphi(x)=\frac{f(0)}{b}(b-x)\quad(0<x<b)$

にとれば解 u, S に対して

(2.12) $-u_x(0,t)\geqq\frac{f(t)}{S(t)}\geqq-u_x(S(t),t)\quad(0\leqq t\leqq\sigma)$

が成立する。

(証明) $\overline{W}(x,t)=\frac{f(t)}{S(t)}(S(t)-x)$ とおき領域 $0<x<S(t), 0<t<\sigma$ で u と $\overline{W}$ を比較する。$w=\overline{W}-u$ とおけば u に対する FBPI から

$$
(2.13)\begin{cases}
w_t=w_{xx}+\overline{W}_t & 0<x<S(t),\ 0<t<\sigma\\
w(0,t)=0 & 0<t<\sigma\\
w(x,0)=0 & 0<x<b\\
w(S(t),t)=0 & 0<t<\sigma
\end{cases}
$$

を得る。ただし $\overline{W}_t\geqq0$ であり熱方程式の正値性から $w\geqq0$ すなわち $\overline{W}(x,t)\geqq u(x,t)$ が成立する。上式で $x=0, x=S(t)$ とおけば (2.12) を得る。

<u>補題5</u>　FBPI において f, φ は補題4と同じ仮定をみたしさらに条件 (f,2) をみたすものとする。このとき解 u, S に対して次の評価が成り立つ:

(2.14) $K_0\sqrt{\int_0^t f(\tau)d\tau}\leqq S(t)\leqq b+\frac{2}{K_0}\sqrt{\int_0^t f(\tau)d\tau}\quad(0\leqq t\leqq\sigma)$

(2.15) $0<\dot{S}(t)=-v(t)\leqq\frac{1}{K_0}\cdot\frac{f(t)}{\sqrt{\int_0^t f(\tau)d\tau}}=\frac{2}{K_0}\cdot\frac{d}{dt}\sqrt{\int_0^t f(\tau)d\tau},\ (0\leqq t\leqq\sigma)$

ここで $K_0=\frac{1}{\sqrt{1+f(\sigma)}}$ である。

(証明)　$u_\tau=u_{\xi\xi}$ を領域 $0<\xi<S(t), 0<\tau<t$ で積分し初期および境界条件を考慮すれば

(2.16) $S(t)+\int_0^{S(t)} u(\xi,t)d\xi = -\int_0^t u_\xi(0,\tau)d\tau + b(1+\frac{1}{2}f(0))$

を得る。一方最大値原理と $S(t)$ の單調性を考慮して(2.12)の最初の不等式を用いれば

(2.17) $\int_0^{S(t)} f(\tau)d\xi \geqq \int_0^{S(t)} u(\xi,t)d\xi$

(2.18) $-\int_0^t u_\xi(0,\tau)d\tau \geqq \int_0^t \frac{f(\tau)}{S(\tau)}d\tau \geqq \frac{1}{S(t)}\int_0^t f(\tau)d\tau$

が得られる。(2.17)と(2.18)を(2.16)に代入し(2.10)に注意すれば

$(1+f(\sigma))S(t) \geqq \frac{1}{S(t)}\int_0^t f(\tau)d\tau$ を得る。これは(2.14)の最初の不等式を意味し，この不等式と(2.12)の2番目の不等式を用いれば(2.15)が成り立つ。(2.15)の両辺を t について 0 から t まで積分すれば(2.14)の2番目の不等式が得られる。

<u>補題6</u>　FBP.1 において $f(t)$ は $f(0)>0$ をみたし $\varphi(x)$ は(2.11)をみたすものとする。さらに

(2.19) $f(t)>0 \quad (0\leqq t\leqq \sigma)$

が成り立つべく σ を十分小にとる。このとき解 u, S に対して

(2.20) $K_2\sqrt{t} \leqq S(t) \leqq b+\frac{2}{K_2}\cdot K_3\sqrt{t} \qquad (0\leqq t\leqq \sigma)$

(2.21) $0<\dot{S}(t)=-v(t)\leqq \frac{K_3}{K_2}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}} \quad (0\leqq t\leqq \sigma)$

が成り立つ。ただし，$K_1=\min_{0\leqq t\leqq\sigma} f(t)$, $K_2=\sqrt{\frac{K_1}{1+K_1}}$, $K_3=\max_{0\leqq t\leqq\sigma} f(t)$ である。

(証明)　補題5と略同様な議論を繰返すことによって証明される。

§3. 定理の証明

3.1 解の構成

σを十分小なる正数とするとき $0 \leqq t \leqq \sigma$ で解の存在が証明されれば，あとはFBPIの結果を用いて接続できるので十分である。また $S(t)$ の単調性の証明もFriedmanの場合と同じであるから省略する。u^b, S^b, v^b を§§ 1.3の末尾で述べたものとする。

1° $\{b_n\}$ を $b_n > b_{n+1} > 0\ (n=1,2\cdots)$ と $b_n \to 0\ (n \to \infty)$ をみたす適当な列としよう。このとき補題3を用いれば $S^{b_n}(t) > S^{b_{n+1}}(t)$ $(0 \leqq t \leqq \sigma)$ が成り立つ。従って $b = b_n \longrightarrow 0$ のとき $S^b(t)$ は任意の $t \in [0, \sigma]$ で各点収束し，その極限関数を $S(t)$ とすれば $S(t)$ は $S(0) = 0$ をみたす。

2° $b = b_n\ (n=1,2\cdots)$ に対して $\{v^b\}$ なる関数列を作ろう。このとき (i) Lebesgue の極限定理を用いれば v^b は $C^*[0, \sigma]$ で弱収束する。また (ii) δ を $\delta < \sigma$ をみたす十分小なる正数とする。このとき補題 5, 6 の (2.15), (2.21) を用いれば v^{b_n} は $L^\infty(\delta, \sigma)$ での有界集合である。したがって $\{v^{b_n}\}$ は $L^\infty(\delta, \sigma) = L_1^*(\delta, \sigma)$ で ※弱収束する。すなわち $v^\infty \in L^\infty(\delta, \sigma)$ を ※弱極限とするとき

$$(3.1)\quad \lim_{b=b_n \to 0} \int_\delta^\sigma v^{b_n}(t)\psi(t)dt = \int_\delta^\sigma v^\infty(t)\psi(t)dt \quad (\psi \in L_1(\delta, \sigma))$$

が成り立つ。$\{\delta_n\}$ を 0 に収束する適当な列として対角線論法を用いれば，$(0, \sigma]$ で上の議論は成り立つ。

3° 1°で定義した$S(t)$は$0\leqq t\leqq \sigma$で連続である。実際補題3,5,6とAscoli−Arzelaの定理を用いれば$S^b(t)$は$0<t\leqq\sigma$で広義一様収束し$S(t)$は$0<t\leqq\sigma$で連続である。さらに，$S(0)=0$であるから$S(t)\to 0(t\to +0)$を示せば$S(t)$は$0\leqq t\leqq\sigma$で連続である。これは$0<t\leqq\sigma$において$b\to 0$にしたときの補題5,bの(2.14),(2.20)を用いれば明らか。$S(t)$は$0\leqq t\leqq\sigma$で連続であるから補題3を考慮しながらDiniの定理を用いれば$b=b_n\to 0$のとき$S^b(t)$は$0\leqq t\leqq\sigma$で$S(t)$に一様収束する。一方補題5,bの(2.14),(2.20)と$S^b(t)$の単調性から$S(t)$は$0<t\leqq\sigma$で正値非減少関数である。

4° 2°でv^{b_n}が$L^\infty(0,\sigma)$で$v^\infty\in L^\infty(0,\sigma)$に*弱収束することを示したが$2^\circ$と$3^\circ$の結果を用いれば$v^{b_n}(t)$は$0<t\leqq\sigma$で各点収束する。FBP.I′を見れば

$$(3.2)\quad v^b(t)=-\frac{2f(0)}{b}\int_0^b N(S^b(t),t;\xi,0)d\xi-2\int_0^t f(\tau)N(S^b(t),t;0,\tau)d\tau$$
$$+2\int_0^t v^b(\tau)G_x(S^b(t),t;S^b(\tau),\tau)d\tau\quad(0\leqq t\leqq\sigma)$$

であるから(3.2)で$b=b_n\to 0$とするとき

$$(3.3)\quad v^b\to v^0(t)=-2f(0)N(S(t),t;0,0)-2\int_0^t f(\tau)N(S(t),t;0,\tau)d\tau$$
$$+2\int_0^t v^\infty(\tau)G_x(S(t),t;S(\tau),\tau)d\tau\quad(0<t\leqq\sigma)$$

が成立する。

5° 3°で述べた連続関数$S(t)$と2°で述べた可測関数v^∞が実は非線型Volterra型積分方程式系(2.2),(2.3)の解であること

を示す。(3.3)と補題5，6の(2.15)，(2.21)を用いればLebesgueの極限定理から任意の$\psi\in C[0,\sigma]$に対して

$$\lim_{b=b_n\to 0}\int_0^\sigma v^b(\tau)\psi(\tau)d\tau=\int_0^\sigma v^\circ(\tau)\psi(\tau)d\tau$$

が得られる。ψとして区間$(0,t)$の特性関数をとったときの上式と(3.1)を比較すれば$0<t\leqq\sigma$の殆んどすべてのtに対して$v^\infty(t)=v^\circ(t)$が成り立ち，(3.2)で$b=b_n\to 0$とすれば$0<t\leqq\sigma$の殆んどすべてのtに対して

$$(3.4)\quad v^\infty(t)=-2f(0)N(s(t),t;0,0)-2\int_0^t f(\tau)N(s(t),t;0,\tau)d\tau$$
$$+2\int_0^t v^\circ(\tau)G_x(s(t),t;s(\tau),\tau)d\tau$$

が成立する。測度0の集合上の$v^\circ(t)$の値を上式の右辺の値に等しいとおく。すなわち$v^\circ(t)$に一致させ，その修正された関数を再び$v^\circ(t)$と書けば，$v^\infty(t)$は$0<t\leqq\sigma$で連続であり$\int_{0+}(-)v^\infty(\tau)d\tau<+\infty$をみたす(3.4)の解である。

最後に$S^b(t)=b-\int_0^t v^b(\tau)d\tau$で$b=b_n\to 0$とし$\psi$として特性関数をとった時の(3.1)を用いれば，(3.4)の$S(t)$は

$$S(t)=-\int_0^t v^\infty(\tau)d\tau\quad(0\leqq t\leqq\sigma)$$

をみたし絶対連続である。(2.1)の右辺の$v(t)$，$S(t)$に上で構成した$v^\infty(t)$，$S(t)$を代入すれば左辺$u(x,t)$は解である。

3.2　$t\to+0$のときの$S(t)$の挙動について

補題5，6の$S(t)$を$S^b(t)$として$b=b_n\to 0$とすれば定理の(ii)が成立することは明らか。

最後に筆者が数学の勉強をするきっかけを作って下さり、かつ、この小論を書く際には何度も刺激となる有益な討論をして下さった藤田宏教授に深く感謝する。

References

1. L.T.Rubinstein, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.), 62 (1948), pp.195-198.

2. A.B.Dacev, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.), 74 (1950), pp.631-634.

3. A.Friedman, J. Math. and Mech. , 8 (1959), pp.499-518.

4. G.W.Evans II, Quart. Appl. Math. , 9 (1951), pp.185-193.

5. J.Douglas & T.M.Gallie, Duke Math.J., 22 (1955), pp.557-571.

6. G.Sestini, Rivista Mat.Univ. Parma, 3 (1952), pp.3-23.

7. W.I.Miranker, Quart. Appl. Math., 6 (1958), pp.121-130.

8. J.Douglas, Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957), pp.402-408.

9. W.T.Kyner, J. Math. and Mech., 8 (1959), pp.483-498.

10. A.Friedman, J. Math. and Mech., 9 (1960), pp.885-903.

11. I.I.Kolodner, Comm. Pure Appl. Math., 9 (1956), pp.1-31.

12. O.Ladyženskaja, V. Solonnikov and N.Uralćeva, Linear and quasilinear equations of parabolic type,

"Nauka", Moscow, 1967; English transl. Math. Monographs, vol.23, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1968.

13. O.Oleinik, Seminari 1962-1963 Anal. Alg. Geom. e Topol., vol.I, Ist. Naz. Acta. Mat., pp.388-403. Ed. Cremonese.

14. H.Brezis, Proc. Sy-pos. Appl. Math., vol.18, Amer. Math. Soc., Providence, R.I, 1968, pp.28-38.

15. A. Friedman, Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1964.